



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

BK 2 - Introduktion til Statik og Styrkelære - Grundkursus i Bærende Konstruktioner

Gitterkonstruktioner

Olesen, Frits Bolonius

Publication date:
2001

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Olesen, F. B. (2001). *BK 2 - Introduktion til Statik og Styrkelære - Grundkursus i Bærende Konstruktioner: Gitterkonstruktioner*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

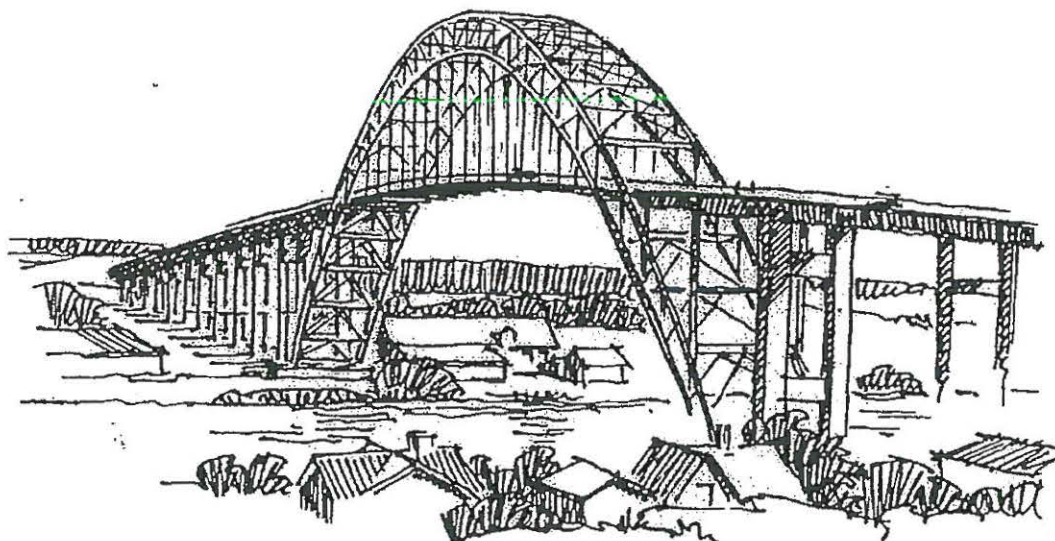
→ ML fra LP

Aalborg Universitet
Arkitektur & Design

BK 2

Introduktion til Statik og Styrkelære
Grundkursus i Bærende konstruktioner

Gitterkonstruktioner



Notat BK 2
Gitterkonstruktioner

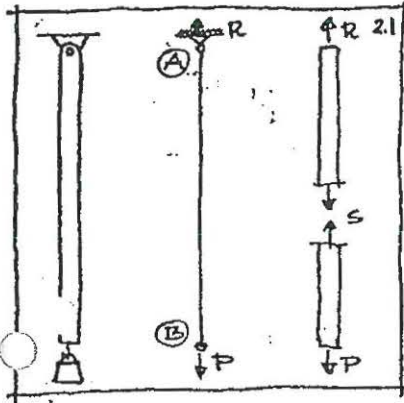
Frits Bolonius
Revideret september 2001

Gitterkonstruktioner

Læsevejledning: M&R*) side 29 - 47

Sammendrag, uddybning, eksempler:

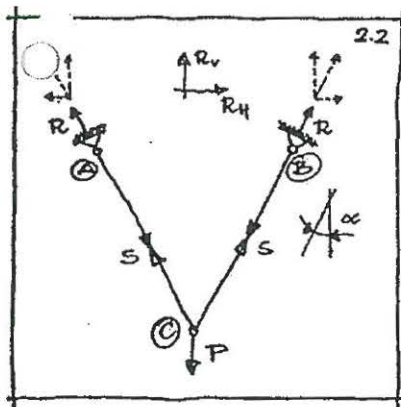
Stangsystemer, snitkræfter, stangkræfter



I figur 2.1 er vist en lodret stang (et retliniet, prismatisk legeme), der er ophængt i et drejeligt led foroven (punkt A) og er fri forneden (punkt B). Stangen angribes i punkt B af en nedadrettet lodret kraft P , hvilket giver anledning til en modsat-rettet lodret reaktionskraft $R (= R_{AV})$ i A. (Bemærk, at der ikke er nogen vandret reaktion i A, jvf projektligningen på vandret $R_{AH} + \sum P_{horizontal} = 0 \rightarrow R_{AH} = 0$).

Stangen er her betragtet som et stift legeme (regnes her vægtløs), og sammenhængen mellem de ydre kræfter (her kun en enkelt lodret kraft) og reaktionerne (her kun en enkelt lodret reaktion) kan bestemmes ved ligevægtsligningerne alene. For at bestemme, hvad der sker inde i konstruktionen tænkes lagt et fiktivt snit vinkelret på stangens længdeakse (et såkaldt normalsnit), hvorved stangen deles i to dele. For at der kan være statisk ækvivalens mellem den virkelige (udelte) stang og den fiktivt delte stang, skal der til hver af dennes to dele tilføjes en ekstra kraft (på den øverste del en nedadrettet kraft S , på den nederste del en opadrettet kraft S). Disse kræfter kaldes snitkræfter og er altså et udtryk for, hvordan den øverste del påvirker den nederste, og omvendt.

I dette tilfælde, hvor snitkraften (S) ligger i stangens retning, dvs. står vinkelret på normalsnittet, benævnes den en normalkraft eller stangkraft. Stangkræfterne regnes sædvanligvis positive som træk og negative som tryk. Tilsvarende benævnes stængerne trækstænger og trykstænger.



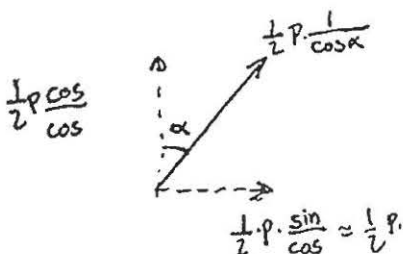
Et eksempel: En lodret last P (figur 2.2) er ophængt i to lige lange stænger AC og BC i en lodret plan. Begge stænger danner en vinkel α med lodret. Lægges et fiktivt snit gennem de to stænger og tilføjes snitkræfterne S (der af symmetri Grunde umiddelbart ses at være ens for de to stænger), fås ved lodret projektion af de kræfter, der virker i punkt C:

$$P - 2 \cdot S \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot P / \cos \alpha$$

Reaktionskræfterne i A og B er lig med stangkraften S i stængernes retning. Opløses de i en vertikal og en horisontal komponent, fås (positive for lodret opad og vandret mod højre):

$$R_{AV} = \frac{1}{2} \cdot P \quad R_{AH} = -\frac{1}{2} \cdot P / \tan \alpha \quad R_{BV} = \frac{1}{2} \cdot P \quad R_{BH} = \frac{1}{2} \cdot P / \tan \alpha$$

*) M&R: Hans Friis Mathiasen & Erik Reitzel: Grundtræk af Bærende konstruktioner i arkitekturen. Arkitektens forlag 1999



I figur 2.3 er vist en buk, som består af to skråstillede planker, der er samlet med en bolt i toppen og hver især er understøttet forneden på en sten og støttet sideværts af en skråpæl. Konstruktionen ligger i en lodret plan og skal bære en byrde, der bevirker en lodret kraft i toppen. Figuren viser tillige konstruktionens *statiske model*, hvor vederlagene regnes som *faste, simple understøtninger*, og tophængslet som *charniere*.

Konstruktionen ses at være en *statisk bestemt plan konstruktion*, idet der er 4 uafhængige *ligevægtsligninger* (for eksempel 2 projektligninger og 2 momentligninger) til bestemmelse af de 4 ubekendte reaktioner.

Lodret projektion: $P - R_{AV} - R_{BV} = 0 \rightarrow R_{AV} + R_{BV} = P$ (1)

Vandret projektion: $R_{AH} + R_{BH} = 0 \rightarrow R_{AH} = -R_{BH}$ (2)

Moment om A: $P \cdot L/2 - R_{BV} \cdot L = 0 \rightarrow R_{BV} = R_{AV} = 1/2 \cdot P$ (3)

Som sidste ligevægtsligning kan *momentligevægt om B* ikke bruges, da den blot giver samme resultat som (1) og (3). Betragtes derimod stang CA og udtrykkes, at denne del alene skal være i momentligevægt om for eksempel C, fås (idet afstanden fra C til linien AB er $h_{AC} = L/2$)

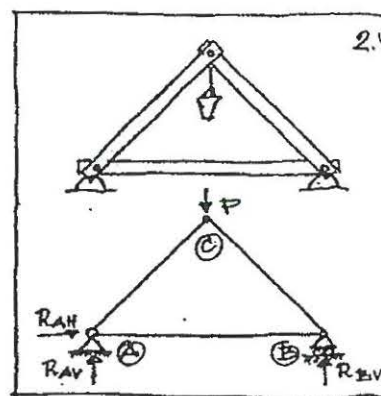
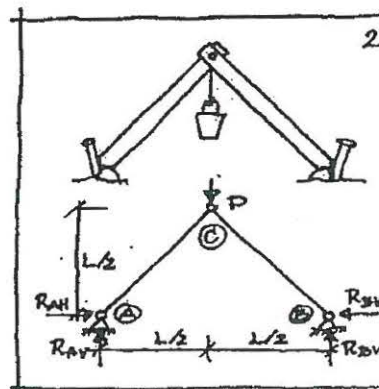
Moment om C: $R_{AV} \cdot L/2 - R_{AH} \cdot h_{AC} = 0 \rightarrow R_{AH} = R_{AV} = 1/2 \cdot P$

Stangkraften S_{AC} er vektorsummen af R_{AH} og R_{AV} , altså $-\sqrt{2}/2 \cdot P$, og S_{BC} tilsvarende $-\sqrt{2}/2 \cdot P$, dvs. begge stænger er *trykstænger*.

Tænkes skråpælene, der yder de vandrette reaktioner i figur 2.3, fjernet, vil stængerne "skride ud" til siden, enten i A eller B eller i begge punkter. Konstruktionen ikke længere *stabil* - medmindre der anordnes en erstating for de fjernede skråpæle, der kan "holde sammen" på stængerne og forhindre A og B i at skride bort fra hinanden og sikre, at de bliver liggende.

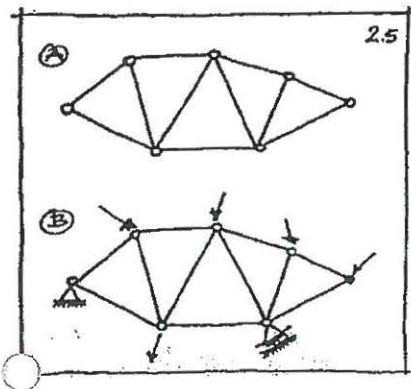
Det kan for eksempel gøres ved at forbinde stængerne med en ekstra stang AB (figur 2.4), således at de tre stænger tilsammen udgør et *stift legeme*. For at være *geometrisk bestemt* (fikseret i planen) og dermed *statisk bestemt*, kræves blot 3 geometriske betingelser, for eksempel et *rulleleje* i B og en *fast, simpel understøtning* i A.

De lodrette reaktioner R_{AV} og R_{BV} er uændret ($= 1/2 \cdot P$), men de vandrette reaktioner R_{AH} og R_{BH} ændres begge til 0 (ses ved vandret projektion). De fjernede skråpæles funktion (at fastholde stængerne mod udskridning i A og B) er overtaget af stangen AB, der derfor får *stangkraften* $S_{AB} = 1/2 \cdot P$ (dvs. *træk*). Den faste understøtning (A's) evne til at optage vandrette kræfter udnyttes ikke i dette tilfælde, hvor der kun er lodret last. Den kunne strengt tages undværes, men i så fald ville konstruktionen ikke være stabil i tilfælde, hvor de ydre kræfter har en vandret komponent.



Gitterkonstruktioner

En trekantformet konstruktion, der er sammensat af tre stænger med friktionsløse led (charnierer) i forbindelsespunkterne (for eksempel som den i figur 2.4 viste), er grundelementet i *gitterkonstruktioner*. En *gitterkonstruktion* kan indeholde et vilkårligt antal stænger (en *plan konstruktion* dog mindst 3, en *rumlig* mindst 6 stænger).



Forbindelsesleddene kaldes gitterkonstruktionens *knudepunkter* eller kort *knuder*. Den plane konstruktion i figur 2.5 består af 11 *gitterstænger*, der er samlet i 7 *knuder*. De danner tilsammen et *stift legeme*, der er *indvendig geometrisk bestemt*, hvormed menes, at hvis blot én stang er fikseret i planen (1 punkt og 1 retning), kan alle øvrige knuder konstrueres (fikseres) entydigt. Hvis der er en *ekstra* stang, repræsenterer den en overtallig geometrisk binding - konstruktionen er *1 gang geometrisk overbestemt*. Ved 2 ekstra stænger er konstruktionen *2 gange geometrisk overbestemt* osv.

For at fikse gitterkonstruktionen i planen, fordres 3 understøtningsbetingelser, for eksempel som vist med en fast, simpel understøtning og en bevægelig simpel understøtning. Den kunne også være fastholdt med 3 bevægelige understøtninger, men i så fald må normalerne til de 3 rullebaner ikke gå igennem samme punkt (da konstruktionen i så fald ville kunne *rottere* om dette punkt og altså ikke være *stabil*).

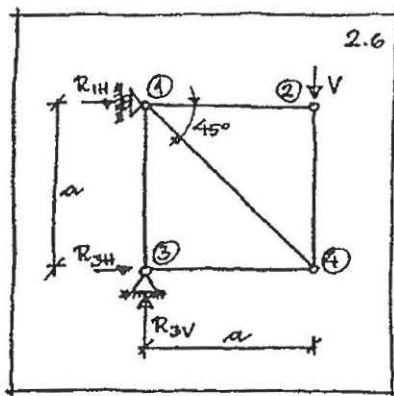
For en *geometrisk* (og dermed *statisk*) bestemt *plan gitterkonstruktion* med s stænger, k knuder og r understøtningsreaktioner gælder relationen

$$2 \cdot k = s + r \quad (2.1)$$

For en *rumlig gitterkonstruktion* er den tilsvarende relation

$$3 \cdot k = s + r \quad (2.2)$$

Konstruktionen i figur 2.5 er statisk bestemt, idet $s + r = 11 + 3 = 14 = 2 \cdot 7 = 2 \cdot k$.



I figur 2.6 er vist en plan gitterkonstruktion med to lodrette og to vandrette stænger samt 1 skrå (45°) stang (en *diagonal*), understøttet fast i punkt 3 og bevægeligt med lodret rullebane i punkt 1 og belastet med en lodret kraft V i punkt 2. Konstruktionen er statisk bestemt, idet $s + r = 5 + 3 = 8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot k$. Stangkræfterne skal bestemmes.

Reaktionerne bestemmes:

Lodret projektion: $V - R_{3V} = 0 \rightarrow R_{3V} = V$

Vandret projektion: $-R_{1H} - R_{3H} = 0 \rightarrow R_{1H} = -R_{3H} \quad (2)$

Moment om 1 $V \cdot a - R_{3H} \cdot a = 0 \rightarrow$

$R_{3H} = V$

Indsat i (2):

$R_{1H} = -V$

Idet stangkræfterne benævnes $S_{12} = S_{21}$, $S_{13} = S_{31}$ osv., bestemmes de ved successivt at "friskære" knuderne og opstille ligevægtsligningerne for de kræfter (ydre kræfter, reaktioner og stangkræfter), der virker på knuden:

Knude 3 (se figur 2.7)

Lodret projektion: $\downarrow -S_{31} - R_{3V} = 0 \rightarrow$

$S_{31} = -V$

Vandret projektion: $R_{3H} + S_{34} = 0 \rightarrow$

$S_{34} = -V$

Knude 1:

Lodret projektion: $S_{13} + S_{14} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \rightarrow$

$S_{14} = V \cdot \sqrt{2}$

Vandret projektion: $R_{1H} + S_{12} + S_{14} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \rightarrow$

$S_{12} = 0$

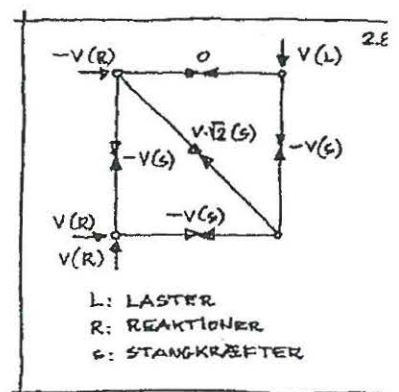
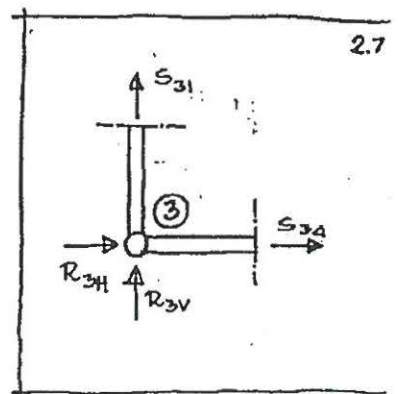
Knude 2:

$-V + S_{12} + V \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0$

Lodret projektion: $V + S_{24} = 0 \rightarrow$

$S_{24} = -V$

Stangkræfterne er indskrevet i figur 2.8.



Eksempel 2.1

Den plane konstruktion i figur 2.9 er statisk bestemt, idet $s = 9$, $r = 3$, $k = 6$, hvoraf $s + r = 9 + 3 = 12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot k$, jvf (2.1). Belastningen er en lodret enkeltkraft P i punkt 6. Stangkræfterne skal bestemmes.

Reaktionerne bestemmes:

Lodret projektion: $P - R_{4V} - R_{5V} = 0 \rightarrow P = R_{4V} + R_{5V} \quad (1)$

Vandret projektion: $R_{4H} = 0$

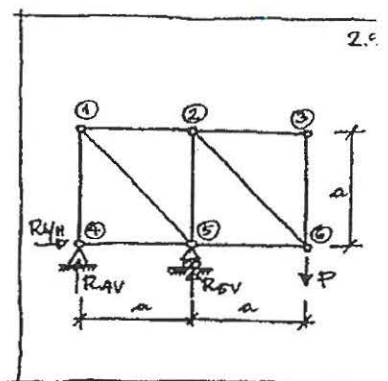
Moment om 4: $P \cdot 2 \cdot a - R_{5V} \cdot a = 0 \rightarrow R_{5V} = 2 \cdot P$

Indsat i (2): $R_{4V} = -P$

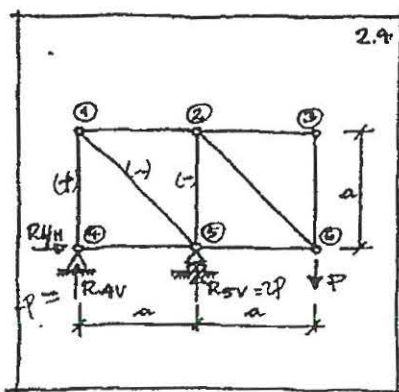
Stangkræfterne bestemmes ved friskæring af knuderne og opstilling af ligevægtsligningerne kræfterne på dem:

Knude 4:

Lodret projektion: $+S_{41} + R_{4V} = 0 \rightarrow S_{41} = -R_{4V} \rightarrow S_{41} = P$



Stang nummerering. ∇



Vandret projektion:

$$R_{4H} + S_{45} = 0 \rightarrow$$

$$S_{45} = 0$$

Knude 1:

Lodret projektion:

$$S_{14} + S_{15} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \rightarrow$$

$$S_{15} = -P \cdot \sqrt{2}$$

Vandret projektion:

$$S_{12} + S_{15} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \rightarrow$$

$$S_{12} = P$$

Knude 5:

Lodret projektion:

$$-S_{25} - S_{15} \cdot \sin(45^\circ) - R_{5V} = 0 \rightarrow$$

$$S_{52} = -P$$

Vandret projektion:

$$S_{56} - S_{15} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \rightarrow$$

$$S_{56} = -P$$

Knude 2:

Lodret projektion:

$$S_{25} + S_{26} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \rightarrow$$

$$S_{26} = P \cdot \sqrt{2}$$

Vandret projektion:

$$-S_{12} + S_{26} \cdot \cos(45^\circ) + S_{23} = 0 \rightarrow$$

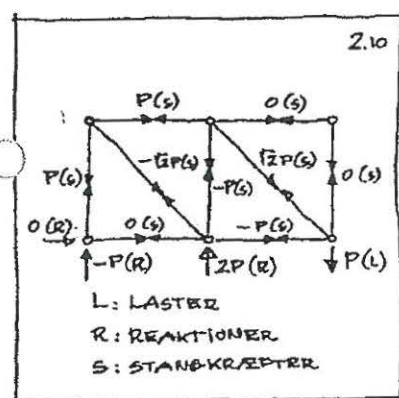
$$S_{23} = 0$$

Knude 3:

Lodret projektion:

$$S_{36} = 0$$

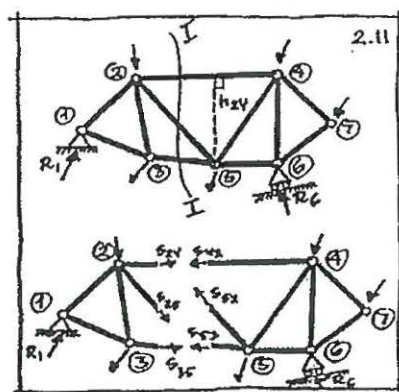
Stangkræfterne er indskrevet i figur 2.10.



Ritter's metode

Den viste metode med successiv friskæring og opstilling af ligevægts-ligningerne for de enkelte knuder er tidkrævende for gitterkonstruktioner med mange stænger. En metode til mere direkte bestemmelse af stangkraften i en bestemt stang i en større konstruktion i princippet uden at skulle bestemme andre stangkræfter end den ønskede er *Ritter's snit-metode* eller kort *Ritter's metode*.

For at bestemme en stangkraften i en bestemt stang n , eksempelvis stang 2-4 i den i figur 2.11 viste gitterkonstruktion, tænkes lagt et *fiktivt snit*, I-I, der passerer stangen n og to andre stænger, hvorved konstruktionen deles i to dele. For at der kan være *statisk ækvivalens* mellem den *virkelige* (udelte) konstruktion og den *fiktivt* delte konstruktion, skal der til hver af de to dele tilføjes en ekstra kraft i hver af de overskårne stænger (rettet mod højre for stænger i den venstre del og rettet mod venstre for stænger i den højre del). For at venstre del vedblivende kan være i lige-vægt - også efter tilføjelse af de tre ubekendte stangkræfter (i de over-skårne stænger) - skal de kræfter, der påvirker denne del (ydre laster, reaktioner *samt* de tilføjede stangkræfter) udgøre et kraftsystem i moment-ligevægt om et vilkårligt punkt i planen, heriblandt også skæringspunktet mellem de to øvrige stænger (her stang 2-5 og stang 3-5) i snittet (altså her punkt 5).



Dette punkt kaldes stang n 's momentcentrum O_n (for det omhandlede snit), og vælges det som momentpunkt for ligevægtsligningen, udgår de to øvrige ubekendte stangkrafter af ligningen, som derefter kun har én ubekendt, stangkraften S_n i stang n , (her S_{24}):

$$\sum P_i \cdot a_i + \sum R_i \cdot a_i + S_n \cdot h_n = 0 \quad (2.3)$$

hvor h_n er afstanden fra stang n til dens momentcentrum O_n (her punkt 5), og a_i er afstanden fra hver enkelt kraft P_i 's eller reaktion R_i 's retning til stang n 's momentcentrum O_n . Summationen skal udstrækkes over hele den betragtede del af konstruktionen, altså alle ydre kræfter og reaktioner til venstre for det fiktive snit. Samme resultat fås, hvis den højre del af konstruktionen betragtes.

Eksempel 2.2

I figur 2.12 er vist en såkaldt *parallel-gitterdrager*, karakteriseret ved, at stængerne i oversiden (6-10) alle har samme retning og er parallelle med stængerne i undersiden (1-5). Stængerne i oversiden og undersiden benævnes også henholdsvis *overflangen* (eller *hovedet*) og *underflangen* (eller *foden*). De lodrette stænger benævnes *vertikaler*, de skrå stænger *diagonaler*. Lodrette laster P i 7, 8 og 9, og $P/2$ i 6 og 10.

Konstruktionen er statisk bestemt: $s(17) + r(3) = 20 = 2 \cdot k(10)$.

$$\text{Reaktioner: } R_{IV} = R_{SV} = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot P + 2 \cdot P/2) = 2 \cdot P \quad R_{IH} = 0$$

For at bestemme stangkrafterne i stang 7-8 (S_{78}), 3-8 (S_{38}) og 3-4 (S_{34}) lægges et fiktivt snit I-I, der passerer de tre stænger.

Moment om stang 7-8's momentcentrum O_{78} (= knude 3), venstre del:

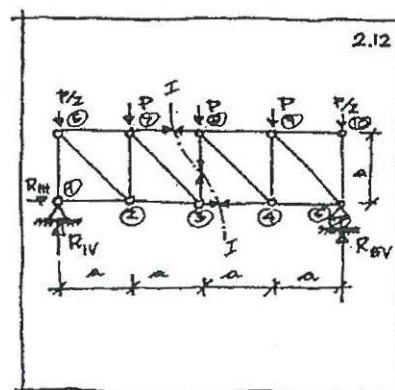
$$S_{78} \cdot a + R_{IV} \cdot 2 \cdot a - P/2 \cdot 2 \cdot a - P \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad S_{78} = -2 \cdot P$$

Moment om stang 3-4's momentcentrum O_{34} (= knude 8), venstre del:

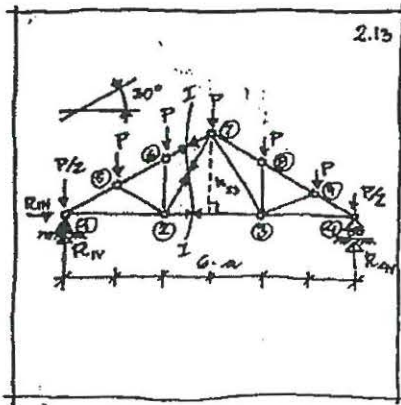
$$-S_{34} \cdot a + R_{IV} \cdot 2 \cdot a - P/2 \cdot 2 \cdot a - P \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad S_{34} = 2 \cdot P$$

Stang 3-8 har for snit I-I ikke noget momentcentrum (da 7-8 og 3-4 er parallelle). Ligevægtsligningen udarter derfor til en projektligning (for eksempel for venstre del):

$$\text{Projektion på lodret: } -S_{38} - R_{IV} + \frac{1}{2} \cdot P + P = 0 \quad \rightarrow \quad S_{38} = -P/2$$



Eksempel 2.3



I figur 2.13 er vist et fransk spærfag - en plan gitterkonstruktion med vandret spærfod og todelt spærhoved med 30° hældning. En jævnt fordelt lodret belastning på spærhovedet henføres til spærhovedets knudepunkter som følgende lodrette laster: P i 5, 6, 7, 8 og 9, og $P/2$ i 1 og 4.

Konstruktionen er statisk bestemt: $s(15) + r(3) = 18 = 2 \cdot k(9)$.

I praksis udføres konstruktionen med gennemgående spærhoved og spærfod, hvortil gitterstængerne forbindes med charnierer. Herved bliver konstruktionen 6 gange geometrisk overbestemt og tilsvarende 6 gange statisk ubestemt, altså væsentlig mere kompliceret at behandle beregningsmæssigt. Den viste model er derfor en *simplifikation* af den virkelige konstruktion, men med hensyn til stangkræfter afviger den forenkledte models resultater kun ubetydeligt fra de "eksakte" resultater.

$$\text{Reaktioner: } R_{1V} = R_{4V} = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot P + 2 \cdot P/2) = 3 \cdot P$$

$$R_{1H} = 0$$

Største stangkraft i spærfoden ønskes bestemt.

For at bestemme stangkraften i stang 2-3 (S_{23}) lægges et fiktivt snit I-I, der passerer stængerne 6-7, 2-7 og 2-3. Stang 2-3's momentarm (afstanden fra stangen til dens momentcentrum O_{23}) er $h_{23} = 3 \cdot a \cdot \tan(30^\circ) = a \cdot \sqrt{3}$.

Moment om stang 2-3's momentcentrum O_{23} (= knude 7), venstre del:

$$S_{23} \cdot a \cdot \sqrt{3} + R_{1V} \cdot 3 \cdot a - P/2 \cdot 3 \cdot a - P \cdot 2 \cdot a - P \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad S_{23} = 3 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot P$$

Stangkraften S_{12} bestemmes ved at fiktiv løsskæring af knude 1

$$\text{Vandret projektion: } S_{12} + S_{15} \cdot \cos(30^\circ) = 0 \rightarrow S_{12} = -S_{15} \cdot \sqrt{3}/2 \quad (1)$$

$$\text{Lodret projektion: } -S_{15} \cdot \sin(30^\circ) - R_{1V} + P/2 = 0 \rightarrow S_{15} = -5 \cdot P$$

$$\text{Indsat i (1): } S_{12} = -S_{15} \cdot \sqrt{3}/2 \rightarrow S_{12} = 5 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot P$$

Af symmetri Grunde er $S_{34} = S_{12} = 5 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot P$.

Beregningseksempel: Idet spærfagene har en indbyrdes afstand på 6 m og spænder 30 m (dvs $a = 5$ m), og den jævnt fordelte lodrette fladelast på taget (egenlast af konstruktion, tagdækning, loft etc samt snelast og vindlast) er 2 kN/m^2 (horisontalprojektion), fås $P = 2(\text{kN/m}^2) \cdot 5(\text{m}) \cdot 6(\text{m}) = 60 \text{ kN}$.

Største stangkraft i spærfoden er $S_{12} = 5 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot P = 5 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 60 = \underline{260 \text{ kN}}$